Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270367
Centre d'intérêt: 89

Thérien, Loïc.

Le concept de groupement dans l'élaboration de situations d'apprentissage en mathématique à l'élémentaire / par Loïc Thérien : [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1979.
33 f. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 22)

Bibliographie: f. 33.

Cote Dewey: 510.7/T399c Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean *Wittmann, Erich

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Approche piagétienne

---

Document théorique qui s'inscrit dans le cadre du projet du département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke intitulé: "le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques". Il a pour but d'apporter des précisions et un vocabulaire mathématique approprié à la notion de groupement, afin de décrire plus rigoureusement les situations pratiques rencontrées. Après avoir rappelé la formulation du concept de groupement chez Jean Piaget, puis chez E. Wittmann, l'auteur présente 22 définitions expliquées de groupements; il termine en donnant un théorème de caractérisation des groupements finis.

Type de document: r
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270367

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Rapport no. 22 Janvier 1979

LE CONCEPT DE GROUPEMENT DANS L'ELABORATION DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUE A L'ELEMENTAIRE

par

Loic Thérien

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques et d'informatique

E D U Q 8270367

SECTION ENSEIGNEMENT

Rapport no. 22 Janvier 1979

LE CONCEPT DE GROUPEMENT DANS L'ELABORATION DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUE A L'ELEMENTAIRE

par

Loic Thérien

Document de travail

dans le cadre d'un projet de recherche

subventionné par le Programme F C A C

du Ministère de l'Education du Québec

Le concept de groupement dans l'élaboration de situations d'apprentissage en mathématique à l'élémentaire.

L'équipe de recherche en enseignement du département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke travaille actuellement sur un projet intitulé: "le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques". On trouvera dans [1] la description du modèle servant de cadre général à cette recherche essentiellement axée sur la pratique de l'enseignement à l'élémentaire, et dans [2] les principes didactiques qui la soustendent. Les situations pratiques rencontrées, pour être décrites plus rigoureusement, ont rapidement commandé des précisions et un vocabulaire mathématique approprié sur la notion de groupement. C'est de ce prolongement théorique dont il sera question dans cet article.

Le concept de groupement chez Jean Piaget.

Le concept de "groupement" apparaît pour la première fois chez Piaget sous une forme pseudo-mathématique lors de ses recherches sur la théorie de la connaissance. Piaget émet l'hypothèse que l'enfant élabore un concept en "opérant" sur les objets à l'aide d' "actions". Ces "actions" ou "opérations" se composent entre elles selon certaines lois (cf. [5] p. 49):

composition: $x + x' = y$, $y + y' = z$; etc.
réversibilité: $y - x = x'$ ou $y - x' = x$
associativité: $(x + x') + y' = x + (x' + y') = (3)$
opération identique générale: $x - x = 0$; $y - y = 0$, etc.
tautologies ou identiques spéciales: $x + x = x$; $y + y = y$; etc..

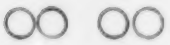
Selon Piaget, le concept surgit progressivement suite à la découverte de ces lois et à la mobilité grandissante que

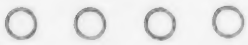
ces "actions" procurent entre les objets.

Illustrons par un exemple tiré des expériences mêmes de Piaget, en espérant ne pas trahir sa pensée. Prenons deux suites de jetons disposés différemment:

Un enfant de 5 ans ne réussit généralement pas encore à dégager le concept de quantité de sa composante spatiale et dira que la dernière suite contient plus de jetons.

Pour affirmer que ces deux suites ont le même nombre d'éléments (concept de la cardinalité) il devra d'abord découvrir un certain nombre, sinon la totalité, des états intermédiaires suivants:

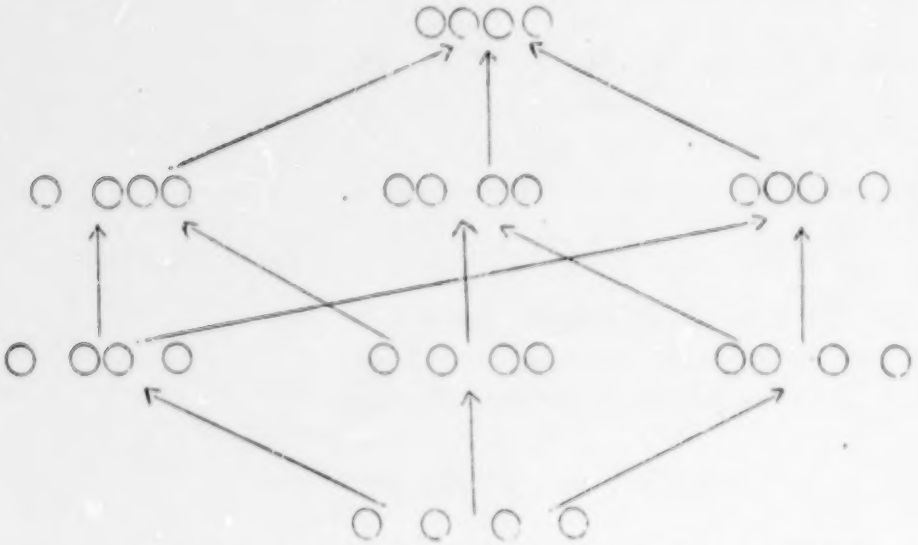




par l'action "rapprocher deux jetons" (ou "écarter deux jetons"), et ensuite pouvoir se déplacer aisément d'un état à un autre en composant ses actions selon les lois ci-haut mentionnés.

Le concept de groupement chez E. Wittmann

Ce sont ces aspects de dynamisme et de construction progressive qui nous ont incités à choisir ce modèle dans la construction d'unités d'apprentissage. Il n'est cependant pas satisfaisant sur le plan mathématique, puisque seule l'opération neutre remplit ces exigences. Il semble que Piaget a représenté par le même symbole (+) deux opérations distinctes. C'est du moins l'interprétation de E. Wittmann qui, à la suite de plusieurs didacticiens (Granger, Grize, etc.) ayant reconnu la pertinence des idées piagétiennes, a donné une formalisation mathématique du concept de groupement basée sur la notion de treillis. Le schéma suivant est effectivement un treillis:



où les suites de jetons sont les "états", les flèches représentent les "actions", la composition de deux "actions" consistant à suivre deux flèches consécutives, la réversibilité étant concrétisée par l'inversion d'une flèche et donnant lieu à l'action "0". x + x signifie maintenant: borne supérieure de x et x, x désignant non plus une action mais un état.

Voici la définition de Wittmann telle qu'on la trouve en [8].

Définition 1. Un groupement est un quintuplet $(M, M \times M, \Delta, o, \lhd)$ où:

(1) M est un ensemble non-vide dont les éléments sont appelés états.

(2) $M \times M$ est le produit cartésien de M. Ses éléments sont appelés opérations.

(3) o est la composition partielle définie canoniquement par

$$(a, b) \; o \; (b, c) = (a, c).$$

(4) Δ est une relation sur M. Ses éléments sont appelés opérations élémentaires.

(5) $\lhd$ est la fermeture réflexo-transitive de Δ, c'est-à-dire:

$$a \lhd b \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ ou } (a, b) = (a_1, x_1) \; o \ldots o \; (x_n, b) \\ (a, x_1), \ldots, (x_n, b) \in \Delta; \end{cases}$$

(6) $M \times M$ est engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$ relativement à o, c'est-à-dire qu'il est la fermeture symétro-transitive de Δ.

(7) $(M, \lhd)$ est un treillis.

On constate aisément que l'illustration précédente satisfait cette définition: M est l'ensemble des suites de jetons, Δ est l'ensemble des flèches apparaissant dans le graphe qui est alors un treillis, et $M \times M$ est bien engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$.

Deux exemples de groupements.

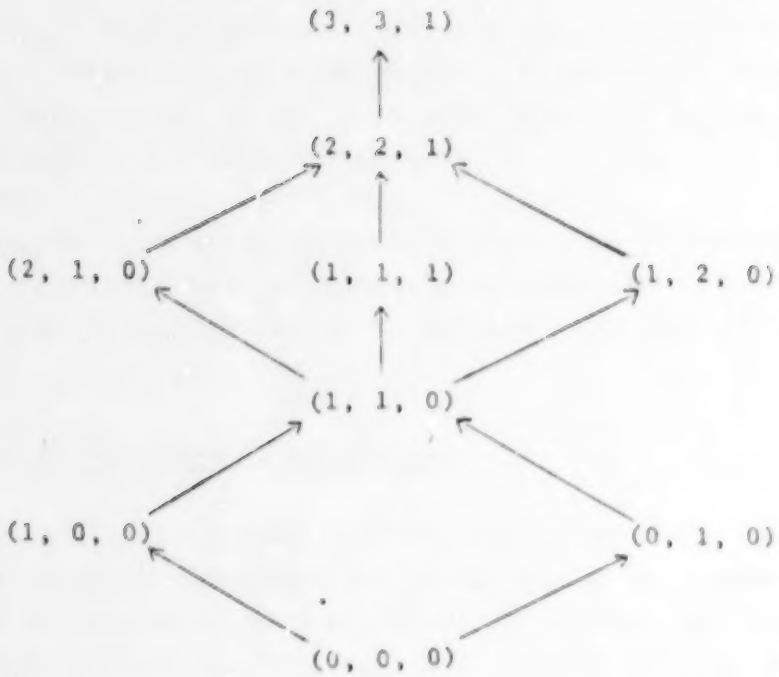
Nous n'avons pas analysé en profondeur, au début de notre recherche, la pertinence de ce modèle mathématique quant à savoir s'il traduit exactement la pensée de Piaget. Nous avons fait nôtre son hypothèse que l'intelligence opère par groupements dans l'apprentissage d'un concept et ce modèle nous a paru valable pour la structuration dynamique d'un ensemble conduisant à l'éclosion d'un concept. Nous l'avons donc adopté comme outil de base dans l'élaboration d'unités d'apprentissage et l'avons appliqué en premier lieu à la découverte d'une classe d'hexaèdres. Nous avons voulu, par ce fait, donner un début de réponse concrète à une directive du programme-cadre concernant la géométrie. Voici le groupement qui nous a servi de guide (cf. [3]).

Soit H(8, 12) l'ensemble des classes d'hexaèdres simples convexes ayant 8 sommets et 12 arêtes partagés selon les propriétés

- nombre de paires de faces parallèles
- nombre de quadruplets d'arêtes parallèles
- être prisme ou non.

Une analyse mathématique démontre qu'il existe 13 classes; (2, 1, 0) désigne, par exemple, la classe des hexaèdres ayant deux paires de faces parallèles, 1 quadruplet d'arêtes parallèles et qui sont des non-prismes.

On peut alors structurer cet ensemble selon le groupement ayant pour Δ:



où une flèche pourrait signifier: "possède une qualité de moins que".

Un autre exemple de groupement traité par Wittmann et correspondant de très près aux expériences de Piaget sur l'ordinalité du nombre est le suivant qui porte sur $\mathbb{N}$:

$$(\Delta) \qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow . \ . \ . \ . \ .$$

où une flèche (opération élémentaire) signifie "ajouter un". $\trianglelefteq$ devient alors $\leq$.

Le groupement obtenu sert manifestement à la découverte du concept "plus petit ou égal" sur les nombres naturels, lequel ne sera vraiment abstrait que lorsque l'enfant pourra se mouvoir librement entre tous ces états en inversant et en composant ses actions.

Ainsi, le modèle mathématique de groupement apparaît comme l'aboutissement, ou la stabilisation définitive, d'une suite d'actions réversibles et de leurs compositions à la suite desquelles le concept sous-jacent se forge.

On pourra trouver de nombreux exemples de groupements reliés à l'apprentissage de concepts mathématiques, tant en géométrie, en combinatoire, qu'en arithmétique dans [3] et [6].

Définition catégorique de groupement:

Dans un article subséquent [7], datant de 1975, Wittmann donne une nouvelle formalisation de la notion de groupement, en termes de catégorie, mettant mieux en lumière le rôle primordial des opérations et élargissant du même coup la portée du concept. Plusieurs structurations sous-jacentes à des concepts importants de l'enseignement à l'élémentaire n'entrent pas en effet dans le cadre étroit de la définition précédente, bien que procédant des principes émis par Piaget. En ce sens, l'exigence "treillis" et l'exigence "une et une seule opération entre deux états" (condition (6)) apparaissent trop restrictives. Ainsi, les deux exigences ne sont pas remplies dans la structuration de N conduisant à la notion de parité:

$$\Delta: \quad \begin{array}{l} 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow \ldots \\ 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow \ldots \end{array} \qquad (\text{"ajouter deux"})$$

Elles n'apparaissent plus dans la définition suivante.

Définition 2. (WITTMANN)

(S, T, C, o) est un groupement si

a) (S, T, o) est une catégorie où chaque morphisme est inversible (groupoïde),

b) T est engendré par C, sous-ensemble de T, dans le sens suivant: pour tout $f \in T$, il existe $g_1, \ldots, g_n \in C \cup C^{-1}$ tels que $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$,

[c) C contient les unités de S.]

Remarque: on ne précise pas si C est minimal ou non pour la propriété d'engendrer T.

Ainsi, S remplace M (états)
T remplace M x M (on n'exige plus T ~ M x M) (opérations)
C remplace Δ (unités en plus) (opérations élémentaires).

On n'exige plus que la "fermeture transitive" de C donne lieu à un treillis. Il n'en est même pas mention dans cette définition.

Il est trivial de vérifier qu'un groupement au sens de la première définition est encore un groupement selon la deuxième, puisque (M, M x M, o) est un groupoïde, à l'exception près que Δ ne contenait pas nécessairement la diagonale ($\{(x, x) \mid x \in M\}$).

Il nous est cependant apparu souhaitable, pour ne pas introduire de conditions artificielles dans les situations concrètes d'apprentissage, de modifier légèrement cette définition en supprimant la condition c) pour l'amalgamer à la condition b). L'enfant, en effet, n'a pas spontanément la notion d' "opération identique" (aller-retour entre deux états adjacents): il la développe au contraire progressivement comme résultat de la "composabilité".

Définition 3.

(S, T, C, o) est un groupement si

a) (S, T, o) est un groupoïde

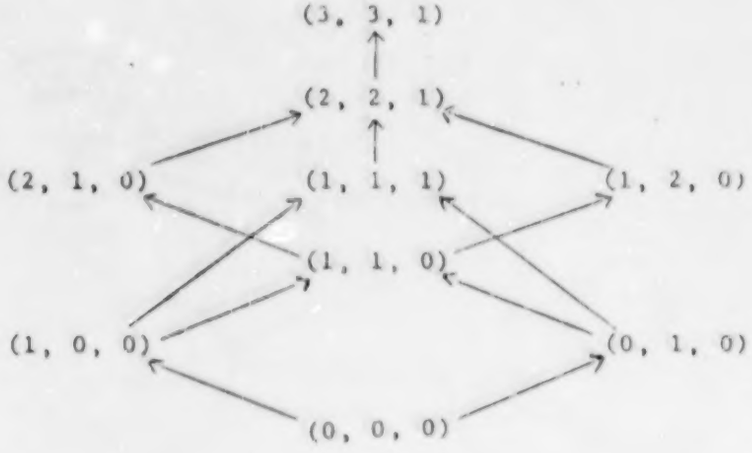
b) T est engendré par C, C ⊂ T, c'est-à-dire, pour tout $f \in T$, $f = g_1 o \ldots o g_n$, où $g_i \in C \cup C^{-1}$

N.B. La définition ainsi modifiée a comme conséquence que: s'il existe $s \in S$ tel que $M(s,x) \cap C = \emptyset$, pour tout $x \neq s$, $x \in S$ alors $1_s \in C$.
En d'autres mots, il n'y a pas d'élément "isolé" dans (S, C).

Voici deux autres situations illustrant la pertinence de cette définition catégorique.

I Composition d'hexaèdres

Soit H (8, 12) où C est représenté par le graphe suivant:



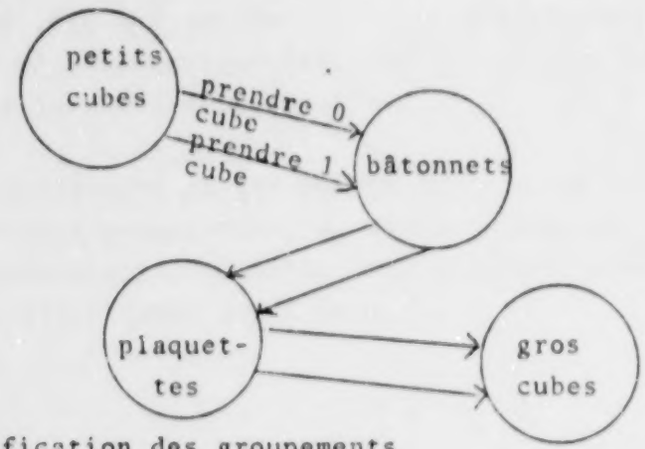
Une flèche indique qu'il existe une façon d'abouter deux hexaèdres d'une classe pour obtenir un hexaèdre de l'autre classe.

La fermeture de C n'est évidemment pas un treillis, ni même un demi-treillis.

Si on décide de représenter par une flèche chaque façon "différente" de composer deux hexaèdres d'une classe pour en obtenir un d'une autre classe (certains couples peuvent alors être reliés par plus d'une flèche), on obtient un autre groupement où cette fois la cardinalité de T dépasse celle de H x H.

II Formation d'un nombre à l'aide du matériel multibase (base 2)

Prenons comme états (S) des boîtes contenant le même type de blocs (petits cubes, plaques, etc.) et comme actions élémentaires (C) les actions de prendre 0 ou 1 bloc. On obtient ainsi un groupement où les opérations peuvent être identifiées aux compositions ou décompositions d'un nombre selon la base 2 et la cardinalité de T est alors plus grande que celle de S x S.



(C)

Classification des groupements

Wittmann apporte certaines précisions sur la nouvelle définition afin de classifier les divers types de groupements [7]:

Définition 4. Un groupement est dit cartésien s'il existe une et une seule opération de T reliant deux états donnés. On identifiera alors T à S x S.

Définition 5. Un groupement est dit ordonné si C ∪ Δ engendre par ∘ (nous parlerons de fermeture réflexo-transitive de C) une relation d'ordre sur S.

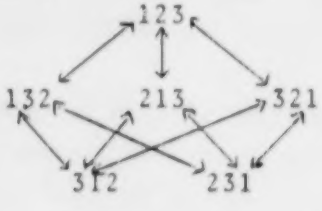
Définition 6. Un groupement ordonné sera appelé groupement de treillis si S, sous cette relation d'ordre, est un treillis.

Nous pouvons ajouter la précision suivante:

Définition 7. Un groupement est dit groupement d'équivalence si la fermeture transitive de C est une relation d'équivalence.

On peut facilement vérifier que ces définitions ne sont pas triviales et que le choix de C (pris minimal ou non pour la propriété d'engendrer T) a une répercussion significative sur le plan didactique (cf. [6], p. 110). Illustrons par un exemple la dernière définition.

Considérons le groupement sous-jacent à la découverte des différentes permutations de trois objets par le biais de l'action élémentaire "permuter deux objets" (transposition). Le graphe sur S donné par C sera



dont la fermeture transitive est une relation d'équivalence.

Il peut paraître à certains que la définition de groupement sous sa dernière formulation est si large qu'elle en devient triviale, en ce sens que pratiquement tout est groupement ou constituant d'un groupement. Sur le plan théorique, en effet, tout monoïde, toute relation sur un ensemble est un groupement. Tenter de montrer que tout apprentissage peut être vu sous cet angle serait enfoncer des portes ouvertes. Il convient cependant de distinguer entre les groupements artificiels qui ne correspondent à aucune réalité scolaire et ceux qui proviennent d'actions concrètes, réalisables et stimulantes débouchant sur des notions au programme de l'élémentaire. C'est selon cet esprit que nous utilisons le groupement et c'est pour répondre à ces exigences que le développement théorique qui suit a été entrepris.

Sous-groupements. .

Nous avons rencontré dans nos travaux pratiques plusieurs situations s'apparentant à une structure de "sous-groupements", ce qui est assez naturel si l'on conçoit qu'un groupement vise à la connaissance d'un aspect de la nature d'un ensemble d'états. En effet, cette connaissance débute généralement avec un nombre restreint d'états ou un nombre restreint d'opérations élémentaires et progresse ensuite vers une plus grande complexification. Il devient dès lors utile sur le plan mathématique de développer un concept précis de sous-groupement.

Dans tout groupement, on peut cependant distinguer deux types de "sous-groupements", chacun correspondant à un aspect didactique important. Regardons l'exemple classique du groupement des nombres naturels:

$$(\mathbb{N},\ \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \{n \longrightarrow n+1\}_{n \in \mathbb{N}},\ o)$$

a) Sur le plan pédagogique, on se restreint dans un premier temps à un sous-ensemble d'états de ce groupement, ce qui conduit, par exemple, à un premier type de "sous-groupement":

$$(A,\ A \times A,\ \{n \longrightarrow n+1\}_{n \in A},\ o),\ A \subset \mathbb{N}.$$

Il en est de même lorsque l'enfant "connaît" un certain nombre d'états mais n'envisage pas encore tous les liens élémentaires existant entre eux.

b) On peut, par ailleurs, vouloir faire acquérir le concept de parité à l'aide de ce groupement; on obtient alors le sous-groupement:

$$(\mathbb{N},\ T,\ \{n \longrightarrow n+2\}_{n \in \mathbb{N}},\ o)$$

En a), on peut dire qu'il s'agit d'une partie du concept "successeur", alors qu'en b), il s'agit plutôt d'un raffinement du concept, le premier procédant de l'induction, le second de la déduction.

Définition 8. Si $G = (S, T, C, o)$ est un groupement, un sous-groupement strict G' de G est un quadruplet (S', T', C', o') où $S' \subset S$, $T' \subset T$, $C' \subset C$, $o' = o|T'$, et qui est un groupement.

Définition 9. Si $G = (S, T, C, o)$ est un groupement, un sous-groupement G' de G est un quadruplet (S', T', C', o') où

$$S' \subset S,\ T' \subset T,\ C' \subset \bigcup_{r \in \mathbb{N}} C^r,\ o' = o|T'$$

et qui est un groupement.

$$(f \in C^r \Longleftrightarrow f = f_1 o \ldots o f_r,\ f_i \in C).$$

(Nous identifierons par la suite o' et o)

Cette dernière définition rencontre la généralité de la définition qui suivra relativement aux foncteurs entre groupements.

Bien sûr, un sous-groupement (strict ou non) est en particulier une sous-catégorie. On peut dès lors caractériser le niveau de maturité du sous-groupement formé en distinguant entre sous-groupement et sous-groupement plein.

Définition 10. $G' = (S', T', C', o')$ est dit sous-groupement plein de $G = (S, T, C, o)$ si (S', T', o') est sous-catégorie pleine de (S, T, o), autrement dit si $T' = T \mid S'$.

La formation de sous-groupements pleins par les enfants sera de loin la plus souhaitable puisque dans la plupart des groupements (ceux ou $|\mathcal{M}(A, B)| = 1$) ceci signifie qu'il n'y a pas d'états "parasites" ou inutilisés.

Dans $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{n \longrightarrow n+1\}_{n \in \mathbb{N}}, o)$:

$(\mathbb{N}, A \times A, \{n \longrightarrow n+1\}_{n \in A}, o)$, $A \subset \mathbb{N}$, est plein;

$(\{1, 2, 5, 6\}, T, \{\overset{1 \longrightarrow 2}{5 \longrightarrow 6}\}, o)$ ne l'est pas.

Nous pouvons maintenant lever l'ambiguité contenue dans la définition de groupement relative au choix "minimum" ou non de C engendrant T. On peut, en effet, dans l'élaboration d'un groupement, être plus ou moins économe d'opérations élémentaires, dépendant du degré de compréhension ou d'habileté face aux états présents. On accédera éventuellement au même concept, que C soit minimal ou non, mais sur le plan mathématique, on sera en présence de deux groupements distincts. La question qui se pose alors est: quel lien existe-t-il entre eux?

Définition 11. Deux groupements $G_1 = (S, T, C_1, o_1)$ et $G_2 = (S, T, C_2, o_2)$ seront dits équivalents si $C_1 \subset C_2$ et $C_2 \subset \cup C_1^r$.

Proposition 1

Si G_1 et G_2 sont équivalents, alors ils sont sous-groupements pleins l'un de l'autre.

La démonstration ne présente pas de difficultés.

Définition 12. Foncteur de groupement

Soient $G_1 = (S_1, T_1, C_1, o_1)$ et $G_2 = (S_2, T_2, C_2, o_2)$ deux groupements et F un foncteur de la catégorie (S_1, T_1, o_1) vers la catégorie (S_2, T_2, o_2). F est dit foncteur de groupement si

$$F(C_1) \subset \cup C_2^r$$

Remarques.

1. On veut qu'ainsi l'image d'une opération élémentaire soit une opération élémentaire ou un produit d'opérations élémentaires, de telle sorte qu'on puisse "plonger" un sous-groupement dans le groupement d'origine.

2. Cette définition est plus générale que celle donnée par Wittmann dans [7], à savoir:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \exists j \in \mathbb{N} \text{ tels que } F(C_1^i) \subset C_2^j$$

qui apparaît trop restrictive pour la notion de sous-groupement développée ici.

Définition 13. Isomorphisme de groupement

Un isomorphisme de groupement, F: $G_1 \longrightarrow G_2$, est un foncteur de groupement qui possède un foncteur de groupement inverse H: $G_2 \longrightarrow G_1$, c'est-à-dire tel que:

$$HoF = 1_{G_1},\ FoH = 1_{G_2} \text{ et } H(C_2) \subset \cup\, C_1^r.$$

On peut montrer l'équivalence de cette définition avec la suivante:

Définition 13'. Un isomorphisme de groupement F: $G_1 \longrightarrow G_2$ est un foncteur de groupement qui est une double bijection sur les objets et les opérations et telle que

$$F^{-1}(C_2) \subset \cup\, C_1^r$$

Proposition 2

$G = (S, T, C, o)$ est isomorphe à $G^* = (S, T, C^{-1}, o)$.

Il suffit de prendre F: G $\quad$ G* où $F(f) = f^{-1}$ et $F(s) = s$.

Remarque.

(S, T, C^{-1}, o) peut être défini comme le groupement dual de (S, T, C, o) et ainsi parler informellement des concepts duaux sous-jacents ou de structurations duales. Il serait intéressant d'expérimenter afin de savoir si le concept dual se dégage facilement du concept initial suite à l'isomorphisme des groupements résultants.

Proposition 3

L'image d'un groupement par un foncteur de groupement est un sous-groupement.

La démonstration découle directement des propriétés d'un foncteur de groupement.

Proposition 4

Les groupements munis des foncteurs de groupements et du produit classique de foncteurs forment une catégorie, appelée catégorie des groupements.

Proposition 5

Dans la catégorie des groupements, deux groupements équivalents sont isomorphes.

Il suffit en effet de prendre le foncteur identité.

Pour résumer la répercussion de la minimalité du C sur l'isomorphisme des groupements résultants, supposons que C_1 est minimal dans (S, T, C_1, o). Si, au lieu de C_1, nous prenons un $C_2 \supset C_1$ où le "surplus" de C_2 est le résultat de la composition d'éléments de C_1, on peut alors affirmer par la proposition précédente que (S, T, C_1, o) et (S, T, C_2, o) sont équivalents et donc isomorphes.

Ce n'est cependant plus le cas, si certains éléments de C_2 sont obtenus d'opérations inverses de C_1. Ainsi:

donnent lieu à des groupements non isomorphes. (cf. p. 110 [6]).

Proposition 6

La relation $\mathcal{L}$: "est sous-groupement de " est une relation de pré-ordre sur l'ensemble des sous-groupements d'un groupement.

Démonstration.

. Soit $G = (S, T, C, o)$ un groupement et $\mathfrak{B}$ l'ensemble de ses sous-groupements.

a) Si $G' \in \mathfrak{B}$, il est évident que G' est sous-groupement de G'.

b) Soient $G', G'', G''' \in \mathfrak{B}$, G' sous-groupement de G'' et G'' sous-groupement de G'''.
$G' = (S', T', C', o')$, $G'' = (S'', T'', C'', o'')$,
$G''' = (S''', T''', C''', o''')$.
A montrer que G' est sous-groupement de G'''.

$S' \subset S \subset S'''$; d'où $S' \subset S'''$
de même $T' \subset T'''$.

Nous avons $C' \subset \cup C''^{r}$ et $C'' \subset \cup C'''^{r}$

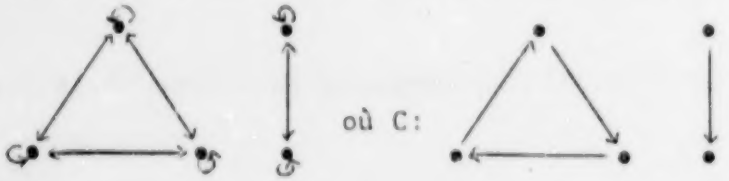
Montrons qu'alors $\cup C''^{r} \subset \cup C'''^{r}$
Soit $f_1 o \ldots o f_n \in \cup C''^{r}$; alors $f_i \in C'' \subset \cup C'''^{r}$
ainsi $f_i = g_{i_1} o \ldots o g_{i_{s_i}}$ où $g_{i_j} \in C'''$

et donc $f_1 o \ldots o f_n = g_{1_1} o \ldots o g_{1_{s_1}} o \ldots o g_{n_1} o \ldots o g_{n_{s_n}}$

$\in \cup C'''^{r}$

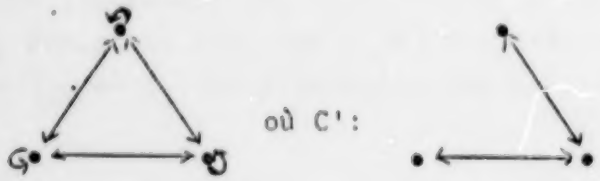
Remarque: La relation $\mathcal{L}$ "est sous-groupement de" n'est cependant pas en général une relation d'ordre. Voici un contre-exemple illustrant qu'elle n'est pas antisymétrique.

Soit la relation d'équivalence suivante (en tant que groupement):

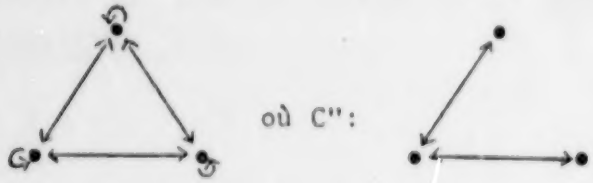


Soient les sous-groupements suivants:

a)



b)



on vérifie en effet que $C' \subset \cup\, C^r$ et $C'' \subset \cup\, C^r$
or, $C' \subset \cup\, C''^r$ et $C'' \subset \cup\, C'^r$.

Proposition 7

Deux groupements, G_1 et G_2, sous-groupements l'un de l'autre sont pleins l'un par rapport à l'autre et isomorphes.

Démonstration.

Puisqu'ils sont de la forme (S, T, C_1, o) et (S, T, C_2, o) il suffit de prendre le foncteur identité.

Proposition 8

La relation : "est sous-groupement strict de" est une relation d'ordre sur l'ensemble des sous-groupements d'un groupement.

Corollaire:

G = G' sii G et G' sont sous-groupements stricts l'un de l'autre.

Convention:

Dans un groupement (S, T, C, o), si C_1 porte sur $S_1 \subset S_2$, $C_1 \subset C$, $\overline{C}_1$ désignera l'ensemble des morphismes engendrés par $C_1 \cup C_1^{-1} \cup I_1$, où I_1 est l'ensemble des morphismes unités sur S_1.

On parlera par abus de langage de la fermeture réflexo-symétro-transitive de C_1.

Evidemment $\overline{C} = T$.

Proposition 9

Si C_1 porte sur S_1 et C_2 porte sur S_2, alors

a) $\overline{C_1 \cap C_2} \subset \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ si $C_1 \cap C_2$ est considéré comme portant sur $S_1 \cap S_2$.

b) $\overline{C_1 \cup C_2} \supset \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$ si $C_1 \cup C_2$ est considéré comme portant sur $S_1 \cup S_2$.

Démonstration

a)
Soit $f \in \overline{C_1 \cap C_2}$. $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$ avec $\begin{cases} g_i = 1_x, \ x \in S_1 \cap S_2 \\ \text{ou} \\ g_i \in C_1 \cap C_2 \\ \text{ou} \\ g_i^{-1} \in C_1 \cap C_2 \end{cases}$

et donc $f \in \overline{C_1}$ et $f \in \overline{C_2}$.

b)
Soit $f \in \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$; alors $f \in \overline{C_1}$ ou $f \in \overline{C_2}$

Si $f \in \overline{C_1}$ alors $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$ avec $\begin{cases} g_i = 1_x, \ x \in S_1 \\ \text{ou} \\ g_i \in C_1 \subset C_1 \cup C_2 \\ \text{ou} \\ g_i^{-1} \in C_1 \subset C_1 \cup C_2 \end{cases}$

et donc $f \in \overline{C_1 \cup C_2}$.

Si $f \in \overline{C_2}$, de la même façon $f \in \overline{C_1 \cup C_2}$.

Corollaire: $\overline{\cap C_i} \subset \cap \overline{C_i}$ et $\overline{\cup C_i} \supset \cup \overline{C_i}$

Proposition 10

Soit $G = (S, T, C, o)$ un groupement et $\mathfrak{A}$ l'ensemble des sous-groupements stricts de G, alors

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \mathfrak{S}, o)$ est un groupement cartésien de treillis complet,

où $\mathfrak{S}$ est la couverture de la relation "est sous-groupement strict de $\mathfrak{A}$.

Démonstration

a) il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un groupement ordonné.

b) Vérifions qu'il est de treillis.

Soient $G' = (S', T', C', o')$ et $G'' = (S'', T'', C'', o'')$ deux sous-groupements stricts de G,

-i-
alors $(S' \cup S'', \overline{C' \cup C''}, C' \cup C'', o''')$ où $o''' = o|_{S' \cup S''}$ en est la borne supérieure. Vérifions-le.

Par construction même, il est évident qu'il s'agit d'un groupement et donc d'un sous-groupement strict de G, aussi que G' et G'' en sont des sous-groupements stricts par la proposition 9 puisque $T' = \overline{C'}$ et $T'' = \overline{C''}$.

Soit donc $G''' = (S''', T''', C''', o''')$ un majorant de G' et G''.

On a $S''' \supset S'$ et $S''' \supset S''$; alors $S''' \supset S' \cup S''$.

On a aussi $T''' \supset T'$ et $T''' \supset T''$; alors $T''' \supset T' \cup T''$

ainsi, $T''' \supset \overline{T' \cup T''} = \overline{\overline{C'} \cup \overline{C''}} \supset \overline{C_1 \cup C''}$.

Enfin, $C''' \supset C'$ et $C''' \supset C''$; alors $C''' \supset C' \cup C''$.

-ii-
$(S' \cap S'', \overline{C' \cap C''}, C' \cap C'', o''')$ où $o''' = o|_{S' \cap S''}$ en est la borne inférieure. Vérifions-le.

Par construction, il est évident qu'il s'agit d'un groupement et donc d'un groupement strict de G. Il est évident aussi que c'est un sous-groupement strict de G' et G''.

Soit donc $G''' = (S''', T''', G''', o''')$ un minorant de G' et G''. Il faut montrer que c'est un sous-groupement strict du groupement ci-haut.

On a $S' \subset S'''$ et $S'' \subset S'''$. Donc $S' \cap S'' \subset S'''$.
On a aussi $C' \subset C'''$ et $C'' \subset C'''$. Donc $C' \cap C'' \subset C'''$.
Enfin $T' \subset T'''$ et $T'' \subset T'''$. Donc $T' \cap T'' \subset T'''$,
c'est-à-dire $\overline{C'} \cap \overline{C''} \subset T'''$, et donc $\overline{\overline{C'} \cap \overline{C''}} \subset T'''$
or $C' \cap C'' \subset \overline{C'} \cap \overline{C''}$,
d'où $\overline{C' \cap C''} \subset \overline{\overline{C'} \cap \overline{C''}} \subset T'''$.

c) Il reste à vérifier que c'est un treillis complet, mais on voit que la même démarche peut être entreprise pour une union et une intersection quelconques en utilisant le corollaire de la proposition 9.

Remarque

Si on enlève le mot "strict" dans la proposition 10, on n'obtient plus qu'un groupement cartésien de pré-ordre.

La démonstration de la proposition précédente conduit aux définitions suivantes:

Définition 14.

Soient $G' = (S', T', C', o)$ et $G'' = (S'', T'', C'', o)$ deux sous-groupements stricts de $G = (S, T, C, o)$. On appelle intersection de G' et G'', noté $G' \cap G''$, le sous-groupement strict (de G', G'' et G).

$$G' \cap G'' = (S' \cap S'', \overline{C' \cap C''}, C' \cap C'', o)$$

Rappelons que $\overline{C' \cap C''}$ désigne la fermeture réflexo-symétro-transitive de $C' \cap C''$, cette dernière étant considérée comme portant sur $S' \cap S''$.

Définition 15

Soient $G' = (S', T', C', o)$ et $G'' = (S'', T'', C'', o)$ deux sous-groupements stricts de $G = (S, T, C, o)$. On appelle

union de G' et G", notée G' ∪ G", le sous-groupement strict

$$G' \cup G'' = (S' \cup S'', \overline{C' \cup C''}, C' \cup C'', o)$$

où C' ∪ C" porte sur S' ∪ S".

La validité de ces deux définitions a été vérifiée lors de la démonstration de la proposition 10.

Fragments de groupements.

Sur le plan apprentissage, il existe une notion plus primitive encore que celle de sous-groupement que Wittmann mentionne vaguement sous le nom de "fragment de groupement" et qu'il relie à la "mobilité" grandissante à l'intérieur d'un groupement. Pour illustrer cette idée, revenons au groupement des nombres naturels munis des actions élémentaires "un de plus".

Il est notoire qu'un enfant dans les premiers temps de son apprentissage des nombres ne découvrira que progressivement les liens entre les nombres: il saura que 4 est un de plus que 3, que 5 vient avant 6, etc.. Mais il ne pourra peut-être pas comparer 18 et 19 ou même 3 et 6. En d'autres mots, bien que connaissant formellement tous les nombres, par exemple, de 1 à 20, il ne saura pas d'emblée faire tous les liens entre ces nombres. Le caractère répétitif (invariant) de l'action "un de plus" viendra peu à peu, de même que les compositions d'actions élémentaires. Avant de concevoir le sous-groupement complet, il en aura une vue fragmentaire et les opérations qu'il pourra construire proviendront des seules actions élémentaires déjà découvertes.

Nous sommes donc amenés, pour traduire ces faits, à définir un objet, partiellement structuré, en passe de devenir un groupement.

Définition 16

Soit G = (S, T, C, o) un groupement. F' = (S', T', C', o) sera dit fragment de groupement (relativement à G) si

$$S' \subset S,\ T' \subset \overline{C'},\ C' \subset C$$

où $S' \neq \emptyset$ et C' porte sur S'.

Sur le plan mathématique, nous avons dans un groupement: $T \supset C$, c'est-à-dire qu'une opération élémentaire est en particulier une opération. Sur le plan apprentissage cependant, nous faisons l'hypothèse que ces deux types d'opérations sont au départ dissociées chez l'enfant. Ce n'est qu'avec l'apparition de la "mobilité" entre états, c'est-à-dire de la "composabilité" d'opérations élémentaires, qu'une opération élémentaire pourra être vue comme une opération s'intégrant à la structure générale. En d'autres mots, le T (ou T', dans le cas de fragment) représente la mobilité acquise par composition alors que le C (ou C') est découvert ou donné sans qu'intervienne la notion de composition. C'est pour cette raison que la condition $C' \subset T'$ n'apparaît pas dans la définition de fragment.

Cette notion traduit la plupart des situations pratiques auxquelles on veut l'appliquer, mais pas toutes. Un enfant, confronté à un ensemble d'états (ou objets) à structurer, peut découvrir un C' plus grand que C avant même d'avoir tout T, par absence d'économie. On pourra cependant arguer que les opérations élémentaires superflues constituent un début de construction de T. C'est pour cette raison et des raisons théoriques que nous nous en tiendrons à cette définition restreinte.

$T' \subset \overline{C'}$ signifie que la "mobilité" entre les divers états ne peut provenir que des actions élémentaires mises à jour par l'apprenant. Ainsi, 3 et 6 ne peuvent être comparés

avant que les liens entre eux (4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1, 6 = 5 + 1) n'aient été découverts.

Définition 17

Soit G un groupement et F un fragment de G. Le "plus petit" sous-groupement (au sens de la relation $\mathcal{L}$) contenant F (au sens de l'inclusion de chacun de ses constituants) est appelé sous-groupement engendré par F et noté E(F).

Il faut vérifier la validité de cette définition, à savoir l'existence et l'unicité de E(F).

Proposition 11

$E(F) = \cap G_i$ où $G_i = (S_i, T_i, C_i, o)$ et $G_i \in \mathcal{A}_F$ l'ensemble des sous-groupements stricts de G contenant F.

Démonstration.

Par définition, $\cap G_i = (\cap S_i, \overline{\cap C_i}, \cap C_i, o)$ et $\mathcal{A}_F \neq \emptyset$ car $G \in \mathcal{A}_F$.

$\cap G_i$ existe donc et est un sous-groupement strict de G.
Montrons qu'il contient $F = (S', T', C', o)$ où $T' \subset \overline{C'}$.

Par hypothèse, $S' \subset S_i$, $T' \subset T_i$, $C' \subset C_i$ pour tout i.

Ainsi $S' \subset \cap S_i$, $C' \subset \cap C_i$ et $T' \subset \overline{C'} \subset \overline{\cap C_i}$.

Il reste à vérifier que $\cap G_i$ est le "plus petit" sous-groupement strict contenant F. Mais ceci est évident, puisque l'intersection de sous-groupements stricts est sous-groupement strict de chacun de ses constituants.

On peut encore caractériser E(F) comme suit.

Proposition 12

Soient G = (S, T, C, o) un groupement et F = (S', T', C', o) un fragment de G; alors

$$E(F) = (S', \overline{C'}^{T}, C', o)$$

La démonstration est facile.

Les fragments intéressants sur le plan didactique seront bien sûr ceux contenant les informations essentielles permettant de déboucher sur le groupement lui-même.

Définition 18

Soit G = (S, T, C, o) un groupement. Un fragment F de G sera dit fragment générateur de G si E(F) est équivalent à G et s'il est minimal pour cette propriété.

Ainsi, dans $(N, N \times N, \{n \longrightarrow n + 1\}_{n \in N}, o)$, le fragment générateur sera $(N, \emptyset, \{n \longrightarrow n + 1\}_{n \in N}, \emptyset)$.

Proposition 13

Un groupement G = (S, T, C, o) possède toujours un fragment générateur F et sa forme générale est

$$F = (S, \emptyset, C', \emptyset)$$

où C' est choisi minimal pour l'égalité $\overline{C'}^{T} = T$ et tel que $C \subset \cup C'^{T}$.

Démonstration

La preuve consiste à procurer un moyen effectif de construire un C':

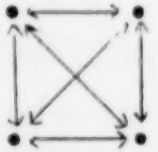
a) on enlève d'abord de C toutes les identités qui peuvent s'obtenir par fermeture symétro-transitive de C;
b) pour tout f appartenant au C restant, on enlève f^{-1} s'il apparaît;

c) on prend finalement la couverture (par rapport à la transitivité) de ce qui reste.

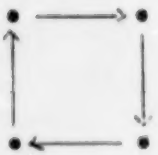
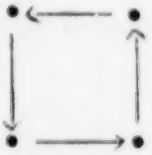
Ce qu'on obtient est évidemment minimal et on restaure T en prenant la fermeture réflexo-symétro-transitive de C'.

L'unicité d'un fragment générateur n'est cependant pas assurée. Ceci apparaît dans l'exemple suivant:

Soit G = (S, T, C, o) où

C: 

prenons:

C_1:  et C_2: 

alors (S, Ø, C_1, ø) et (S, Ø, C_2, ø) sont tous deux des fragments générateurs de G.

Evidemment si dans un groupement G = (S, T, C, o), C est déjà minimal pour l'égalité $\overline{C}$ = T, son fragment générateur est unique et est

F = (S, Ø, C, ø).

Définition 19

Soit G = (S, T, C, o). Un fragment de la forme (S', Ø, C', ø) est dit fragment élémentaire.

Sur le plan apprentissage, la construction d'un groupement se fait par la découverte progressive de sous-groupements engendrés par des fragments élémentaires de plus en plus complets jusqu'à atteindre le groupement engendré par un fragment générateur.

Définition 20

Soit un triplet $\mathcal{E} = (S, C, o)$, où $S \neq \emptyset$, o est une opération partielle portant sur C, lui-même une relation quelconque sur S. Le groupement:

$$G = (S, T, C, o) \text{ où } T = \overline{C}$$

sera appelé le groupement libre engendré par $\mathcal{E}$.

On peut transformer cette définition en une définition catégorique en calquant la définition de Mclane p. 49 [4] pour une catégorie libre engendrée par un S-graphe orienté. La même caractérisation en termes de diagramme universel trouvée en [4] p. 50 pour les catégories libres s'applique alors aux groupements libres.

Caractérisation des groupements ordonnés finis.

Définition 21

Un groupement $G = S, \Gamma, C, o)$ est dit fini si $|T| < \infty$.

Définition 22 (due à Wittmann [7])

Un groupement $G = (S, S \times S, C, o)$ est dit booléen si $S = \mathcal{P}(X)$, pour un X donné, et si la fermeture réflexo-transitive de C (ou de C^{-1}) est la relation d'inclusion.

Proposition 14

Un groupement booléen est un groupement cartésien de treillis complet.

Théorème de caractérisation des groupements finis.

Tout groupement fini ordonné est isomorphe à un sous-groupement d'un groupement booléen. En particulier, il peut être plongé (au sens qu'il existe un foncteur fidèle) dans un groupement booléen.

Démonstration

Soit $G = (S, T, C, o)$, $|T| < \infty$, un groupement.

Considérons

$$G \xrightarrow{F} (\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), C', o)$$

où $f' \in C' \Longleftrightarrow f: X \longrightarrow Y$ et $X \subset Y$ et $|Y - X| = 1$.

Définissons F sur (S, T, o):

$F(s) = \{u \in S \mid \exists f: u \longrightarrow s$, f appartenant à la fermeture transitive de C$\} \cup \{s\}$

et si $s \xrightarrow{f} v$, $f \in T$, alors

$F(s) \xrightarrow{F(f)} F(v)$ où F(f) est le seul morphisme entre F(s) et F(v).

Il est clair que F est un foncteur. De plus, F est un foncteur de groupement puisque T étant fini, S l'est aussi et si

$x \xrightarrow{f} y$, $f \in C$

alors F(y) est obtenu de F(x) en ajoutant au plus un nombre fini d'éléments de S, ce qui correspond à la composition d'un nombre fini d'éléments de C'.

Ainsi $F(C) \subseteq \cup C'^{r}$.

Vérifions que F est un isomorphisme de groupement.

Montrons que $F: G \longrightarrow F(G)$ est une double bijection.

a) Supposons $F(s) = F(t)$

alors $s \in F(t)$ c'est-à-dire $\begin{cases} s = t \text{ ou} \\ \exists f: \ s \longrightarrow t \end{cases}$

et $t \in F(s)$ c'est-à-dire $\begin{cases} s = t \text{ ou} \\ \exists g: \ t \longrightarrow s \end{cases}$

Supposons $s \neq t$. Alors la fermeture transitive de C comporte f et g contredisant l'hypothèse que c'est un ordre.

b) F est une surjection par défaut puisque, G étant un groupement ordonné, il n'existe jamais plus d'une opération entre deux états.

Finalement, montrons que $F^{-1}(C') \subset \cup C^r$.

Soit $f' \in C'$ dans l'image de F. Alors $\exists f: \ s \longrightarrow v$ ($s \neq v$ par définition de C') tel que $F(f) = f'$.

$f': \ X \longrightarrow Y$ où $X \subset Y$ et $|Y - X| = 1$.

Alors $X = F(s) = \{s_1, \ldots, s_n, s\}$

$Y = F(v) = \{s_1, \ldots, s_n, s, v\}$.

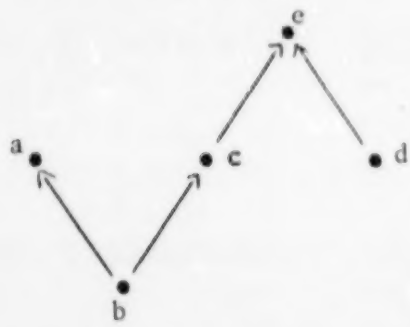
Or $s \in Y = F(v)$ et donc, par définition de $F(v)$, $\exists g$ appartenant à la fermeture transitive de C tel que $g: \ s \longrightarrow v$.

Mais il n'existe qu'un seul morphisme de s à v.

Ainsi $F^{-1}(f') = f = g \in \cup C^r$.

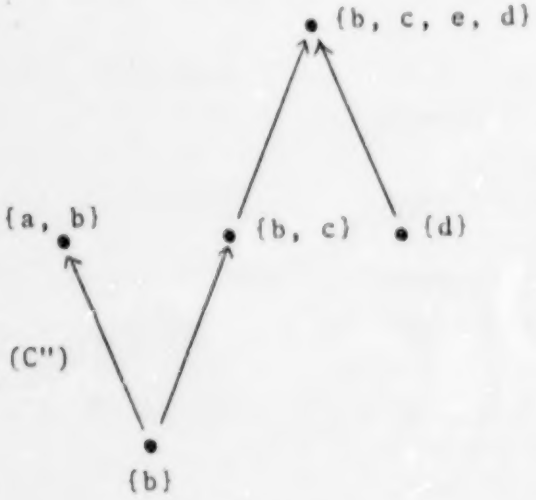
Illustration.

Soit le groupement $(X, \overline{C}, C, o)$:



(C) $X = \{a, b, c, d, e\}$

Considérons le groupement booléen $(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X), C', o)$ et le sous-groupement suivant:



C' défini comme dans le théorème.

où les morphismes sont évidemment contenus dans $\cup C'^{r}$.

l'isomorphisme devient alors évident.

[1] D. Lunkenbein — Instantanés mathématiques, Vol. XIII, no 4, avril 1977.

[2] D. Lunkenbein — Didactique de la Mathématique, rapport no 16, Publication interne du département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke.

[3] D. Lunkenbein — Groupements de treillis, rapport no 19, Publication interne, département de mathématiques, Université de Sherbrooke.

[4] S. Maclane — Categories for the working mathematician, Springer-Verlag, New-York, 1971.

[5] J. Piaget — La psychologie de l'intelligence, Armand Colin, Paris V^{e}, 1967.

[6] L. Thérien — Structures algébriques, catégories et groupements, rapport no 20, Publication interne, département de mathématiques, Université de Sherbrooke.

[7] E. Wittmann — Natural Numbers and Groupings, Educational Studies in mathematics, 6, 1975, 53-75.

[8] E. Wittmann — The concept of grouping in Jean Piaget's Psychology - Formalisation and Applications, Educational Studies in mathematics, 5, 1973, 125-146.